$y = 1 - x$

$\boxed{x}_{n=0}$

$$\sum_{n=2}^{N} \binom{N}{n} n(n-1)\, x^{n-2} (1-x)^{N-n}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot n \cdot (n-1)\, x^{n} \cdot (1-x)^{N-n}$$

$= (n^2 - n)$

$$N = \frac{1}{x} \cdot \langle k \rangle$$

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 \cdot \binom{N}{n} \cdot x^n (1-x)^{N-n} - \sum_{n=0}^{N} n \cdot \binom{N}{n} x^n (1-x)^{N-n}$$

Loi de Bernoulli

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\mathbb{P}(X=1) = p$

$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

$\mathbb{E}[X] = p$

$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$

$= p - p^2$

$= p(1-p)$

$\langle X^2 \rangle = \mathbb{E}[X^2] =$

$= X^2 \cdot P(X^2)$

$= 1 \cdot \frac{v}{V} + \underbrace{0^2\left(1-\frac{v}{V}\right)}_{=0} = \frac{v}{V}$

$X_i = 1$ iff particule i est dans v

$X_i = 0$ sinon

$\mathbb{E}[X_i] = \langle X_i \rangle$

$= 1 \times \frac{v}{V} + 0 \times \left(1 - \frac{v}{V}\right)$

$= \frac{v}{V}$

$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{v}{V}$

$\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \frac{v}{V}$

$k = \sum X_i$

Nombre de particules dans v

$\langle k \rangle = N \cdot \frac{v}{V}$

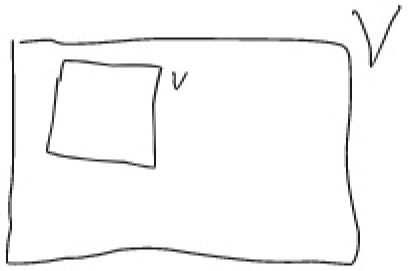
$\langle k \rangle = \mathbb{E}[k] = \mathbb{E}\left[\sum X_i\right] = \sum \mathbb{E}[X_i] =$

$\text{Var}(k) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$

$\langle k^2 \rangle$

$\text{Var}(X_i) = \frac{v}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right)$

$\text{Var}(k) = \text{Var}\left(\sum X_i\right) = N \frac{v}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right)$



$= p = \frac{v}{V} \times N$

$\langle k \rangle = \frac{v}{V} \cdot N$

2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de N molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit k le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k \rangle$ de k ?

2 – Quel est l'écart-type σ_k de k ?

Indice : on peut écrire la variable k comme une somme de N variables aléatoires indépendantes.

Données : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = N_A$.

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour N très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de k ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume v ?

On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait k molécules dans le volume v.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les k molécules parmi N qui sont dans le volume v ?

7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume v ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à x, puis remplacer y par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de k.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k \rangle$ (on posera $k = \langle k \rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

$v = \frac{V}{2} \quad N = 100 \quad N = 10^{10} \quad N = N_A$

$\sigma_k = \sqrt{N \frac{v}{V}\left(1 - v/V\right)}$

$N: 100 \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{\frac{100}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{50 \cdot \frac{1}{2}}$

$= 5$

$N: 10^{10} \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{10^{10} \cdot \frac{1}{4}}$

$= \frac{10^5}{2} = 0{,}5 \cdot 10^5$

$= 5 \cdot 10^9$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{10^6} = 10^3$

$\sqrt{100^{50}} = 100^{25}$

$\frac{100^{10}}{2^{10}} = 50^{10}$

$\frac{100^{10}}{2} \neq 50^{10}$

2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de N molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit k le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k \rangle$ de k ?

2 – Quel est l'écart-type σ_k de k ?

Indice : on peut écrire la variable k comme une somme de N variables aléatoires indépendantes.

Données : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = N_A$.

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour N très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de k ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume v ?

On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait k molécules dans le volume v.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les k molécules parmi N qui sont dans le volume v ?

7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume v ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à x, puis remplacer y par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de k.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k \rangle$ (on posera $k = \langle k \rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

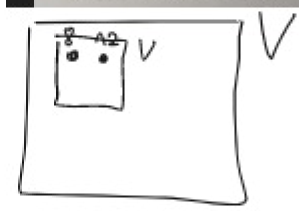
$\binom{N}{k}$

$N \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{v}{V}\right)}_{\geq 0}$

$\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} \quad \left(\frac{v}{V}\right)^N$

Père de Noël a 10 présents. Tu peux en choisir 3 ! Combien de possibilités ?

6. $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad \binom{10}{3}$



$\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V}$

$1 - \left(\frac{v}{V}\right)^4$

7) $p = \left(\frac{v}{V}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{96}$

8) $p(k) = \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-k}$

Quelles k particules sont dans v ?

$k \sim \text{Binom}\left(N ; p_i = \frac{v}{V}\right)$

9) À montrer : $p(k) \geq 0 \quad \forall k \in \{0, .., N\}$

et $p(k) \leq 1$

$\sum_{k=0}^{N} p(k) \stackrel{!}{=} 1$

$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{v}{V}\right)^k \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-k} = \left(\cancel{\frac{v}{V}} + 1 - \cancel{\frac{v}{V}}\right)^N = 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot x^k \cdot y^{N-k} = (x+y)^N}$$

4 Man…

L'intégrale Gaus…

Soit l'intégrale g…

1 – Montrer que I_1(…

2 – Exprimer $I_n(\alpha)$ …

3 – On admet en sus…

La fonction Ga…

On définit la fo…

4 – Calculer $\Gamma(1)$ et…

5 – Montrer que Γ(…

1 Décroissan…

On veut maintenant calculer la distribution de prob
supposer N fini, et, à la toute fin du calcul, on pren
2 – Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration
aucune pendant tous les autres intervalles ? En dédui
pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quel
3 – Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégration
l'intervalle 71 par exemple ? En déduire la probabili
toute la durée T, sans qu'on précise à quels instants
4 – De même, déterminer la probabilité $P(k)$ d'avoir
instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution
5 – Prendre la limite $N \to \infty$ (après avoir remplacé p pa
$P(k)$ en fonction de α et de T (on rappelle que
Indice : en cas de doute, commencer par calculer la
6 – Comment s'appelle cette distribution de probabilité
ment la valeur moyenne $\langle k\rangle$ et la variance $\mathrm{Var}(k)$.
Indice : écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

$k=0$

αT et $\langle k(k-1)\rangle = \dots$
$\langle k(k-1)\rangle + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 = \alpha T = \langle k\rangle$.

2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de N molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit k le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k\rangle$ de k ?
2 – Quel est l'écart-type σ_k de k ?
Indice : on peut écrire la variable k comme une somme de N variables aléatoires indépendantes.
Données : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{10}$ et $N = N_A$.
3 – Faire l'application numérique
4 – Pour N très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de k ?
5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume v ?
On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait k molécules dans le volume v.
6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les k molécules parmi N qui sont dans le volume v ?
7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume v ?)
8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?
9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \quad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.
10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à x, puis remplacer y par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de k.
11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k\rangle$ (on posera $k = \langle k\rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

$$(x^{10})' = 10x^9 \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (100)' = 0 \qquad x^0 = 1 \qquad (x^0)' = 0$$

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot x^n \cdot y^{N-n} \quad \Big|\ (\ )'$$

$$N(x+y)^{N-1} = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} n x^{n-1} y^{N-n} \quad \Big|\ (\ )'$$

$$\xrightarrow{y=1-x} N\cdot(x+1-x)^{N-1} = \dots$$

$$N = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} (1-x)^{N-n} \binom{N}{n}$$

$$N = \sum_{n=0}^{N} n \cdot \binom{N}{n} \cdot x^{n-1} \cdot (1-x)^{N-n}$$

$$N = \boxed{\frac{1}{x}} \sum_{n=0}^{N} n \cdot \underbrace{\binom{N}{n} x^n \cdot (1-x)^{N-n}}_{p(n)} \qquad x = \frac{v}{V}$$

$$N = \frac{1}{x} \cdot \langle k\rangle \Rightarrow \boxed{\langle k\rangle = \frac{Nv}{V}}$$

$$N(N-1)(x+y)^{N-2} = \sum_{n=2}^{N} \binom{N}{n} n(n-1) x^{n-2} y^{N-n}$$

$$\downarrow y = 1-x$$

$$N(N-1) = \sum_{n=2}^{N} \binom{N}{n} n(n-1) x^{n-2} (1-x)^{N-n}$$

$$N(N-1) = \boxed{\frac{1}{x^2}} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot \underbrace{n(n-1)}_{= (n^2-n)} x^n \cdot (1-x)^{N-n}$$

$$\sum_{i=0}^{100} i^2 - i = \sum_{i=0}^{100} i^2 - \sum_{i=0}^{100} i$$

$$= \frac{1}{x^2}\Big[\underbrace{\sum_{n=0}^{N} n^2 \binom{N}{n} \cdot x^n (1-x)^{N-n}}_{\substack{n^2 \cdot p(n) \\ \langle k^2\rangle}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} n \cdot \binom{N}{n} x^n (1-x)^{N-n}}_{\substack{n\cdot p(n) \\ \langle k\rangle}}\Big]$$

1er dérivée : valeur moyenne $\quad x = \frac{v}{V}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} x \cdot (i^2 - i) \cdot y \cdot z &= \sum i^2 x \cdot y \cdot z - i \cdot x \cdot y \cdot z \\ &= \sum i^2 xyz - \sum i x.\end{aligned}}$$

$$N(N-1) = \frac{1}{x^2}\left(\langle k^2\rangle - \langle k\rangle\right)$$

$$\langle k^2\rangle = N(N-1) \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \langle k\rangle$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(k) &= \langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2 \\
&= \underbrace{N(N-1)}_{N^2-N} \cdot \frac{v^2}{V^2} + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 \\
&= N^2 \cdot \frac{v^2}{V^2} - N \cdot \frac{v^2}{V^2} + \underset{N\cdot\frac{v}{V}}{\langle k\rangle} - \langle k\rangle^2 \\
&= \cancel{\langle k\rangle^2} - \frac{v}{V}\langle k\rangle + \langle k\rangle - \cancel{\langle k\rangle^2} \\
&= \langle k\rangle \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right) \\
&= N \cdot \frac{v}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right)
\end{aligned}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\mathrm{Var}(k)} = \sqrt{v}$$

miro

$$\sigma_k = \sqrt{Var(k)} = \sqrt{\ }$$

$\langle k(k-1)\rangle + \langle k\rangle - \langle k\rangle^2 = aT = \langle k\rangle$.

2 Fluctuation dans un gaz parfait

Un gaz parfait est constitué de N molécules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit k le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1 – Quelle est la valeur moyenne $\langle k\rangle$ de k ?

2 – Quel est l'écart-type σ_k de k ?
Indice : on peut écrire la variable k comme une somme de N variables aléatoires indépendantes.
Données : $v = \frac{V}{2}$ et $N = 100$, puis $N = 10^{20}$ et $N = \mathcal{N}_A$.

3 – Faire l'application numérique

4 – Pour N très grand et $\frac{v}{V}$ fixé, vers quelle loi tend la distribution de probabilité $P(k)$ de k ?

5 – Quelle est la probabilité que toutes les molécules du gaz soient dans le volume v ?
On veut calculer la probabilité exacte $P(k)$ qu'il y ait k molécules dans le volume v.

6 – De combien de manières différentes peut-on choisir les k molécules parmi N qui sont dans le volume v ?

7 – Quelle est la probabilité de l'un de ces choix ? (par exemple, pour $k = 4$ et $N = 100$, quelle est la probabilité que les particules numéros 8, 12, 35 et 42, par exemple, soient dans le volume v ?)

8 – En déduire l'expression de $P(k)$. Quel est le nom de cette distribution de probabilité ?

9 – On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n}. \qquad (1)$$

Vérifier que la distribution de probabilité $P(k)$ est bien normalisée.

10 – Calculer les dérivées première et seconde de l'égalité (1) par rapport à x, puis remplacer y par $1-x$ dans les expressions obtenues. Utiliser les formules ainsi obtenues pour retrouver la moyenne et la variance de k.

11 – On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité $\frac{N}{V}$ est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $\langle k\rangle$ (on posera $k = \langle k\rangle + s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

$$s \ll 1$$

$$\mathbb{P}(k = \langle k\rangle + s)$$

$$= \binom{N}{\langle k\rangle + s} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^{\langle k\rangle + s} \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N - \langle k\rangle + s}$$

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \longrightarrow \quad = \frac{N!}{(\langle k\rangle + s)!\,(N - \langle k\rangle - s)!}$$

$$P(\langle k\rangle + s) = \frac{N!}{\left(N\frac{v}{V} + s\right)!\,\left(N - N\frac{v}{V} - s\right)!} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^{N\cdot\frac{v}{V} + s} \cdot \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N - N\cdot\frac{v}{S} + s}$$

$$\Big\downarrow\ N \to \infty$$

1 Décroissance radioactive

On considère la désintégration d'une source radioactive. On observe que pendant une durée T courte devant la demi-vie de la source, le nombre moyen de désintégrations est $\langle k \rangle = \alpha T$. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que pendant un temps T il y ait k désintégrations. Pour modéliser la désintégration, on découpe la durée T en $N \gg 1$ intervalles de très courte durée $\Delta t = \frac{T}{N}$. Pendant chacun des N intervalles Δt, il y a donc 0 ou 1 désintégration. On suppose que les événements sont indépendants d'un intervalle à l'autre. Soit $p \ll 1$ la probabilité qu'une désintégration se produise pendant un intervalle Δt.

1 – Quel est le nombre moyen de désintégrations dans un intervalle Δt donné ? Quel est le nombre moyen de désintégrations pendant la durée T ? En utilisant l'introduction, en déduire une expression de p en fonction de α, N et T.

On veut maintenant calculer la distribution de probabilité du nombre de désintégrations. On commence par supposer N fini, et, à la toute fin du calcul, on prendra la limite $N \to \infty$.

2 – Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration pendant un intervalle Δt donné (par exemple le 17^e) et aucune pendant tous les autres intervalles ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement une désintégration pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quel instant elle a eu lieu.

3 – Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations pendant le temps T, l'une à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 71 par exemple ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement deux désintégrations pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quels instants elles ont eu lieu.

4 – De même, déterminer la probabilité $P(k)$ d'avoir exactement k désintégrations pendant la durée T à des instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution de probabilité est normalisée.

5 – Prendre la limite $N \to \infty$ (après avoir remplacé p par son expression en fonction de N bien sûr) pour obtenir $P(k)$ en fonction de α et de T (on rappelle que $\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{a}{N}\right]^N = e^a$).
Indice : en cas de doute, commencer par calculer la limite pour $k = 1$ ou $k = 2$.

6 – Comment s'appelle cette distribution de probabilité ? Vérifier qu'elle est bien normalisée. Calculer explicitement la valeur moyenne $\langle k \rangle$ et la variance $\mathrm{Var}(k)$.
Indice : écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

---

probabilité de désint. : p

Jantre intervalles : $N-1$

intervalles fixes

$$3)\quad \mathbb{P} = p \cdot p\,(1-p)^{N-2}$$

intervales possibles

$$\mathbb{P}^{(k=2)} = \binom{N}{2} p^2 (1-p)^{N-2}$$

Dans quelles intervalles as-tu une désintegration ?

$$2)\quad \mathbb{P} = p \cdot (1-p)^{N-1}$$

$$\mathbb{P} = \binom{N}{1} p \cdot (1-p)^{N-1}$$

Dans quelle intervalle as-tu une désintegration ?

$$\boxed{4)\quad p(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}}$$

Loi ~~binomiale~~ !

$$\sum_{k=1}^{N} p(k) \overset{?}{=} 1 \quad \leftarrow \text{à vérifier}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = (p+1-p)^N = 1^N = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} x^k \cdot y^{n-k} = (x+y)^N}$$

Loi binom de Newton

$X_i = 1$ s'il y a une désintégration dans i-ième intervalle

$X_i = 0$ sinon

$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1-p$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$\langle X_i \rangle = \mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i = 0)$$

$$= \mathbb{P}(X_i = 1) = \boxed{p}$$

$$k = \sum X_i \sim \text{Binom}(N, p)$$

$$k \in \{0, 1, \dots, N\}$$

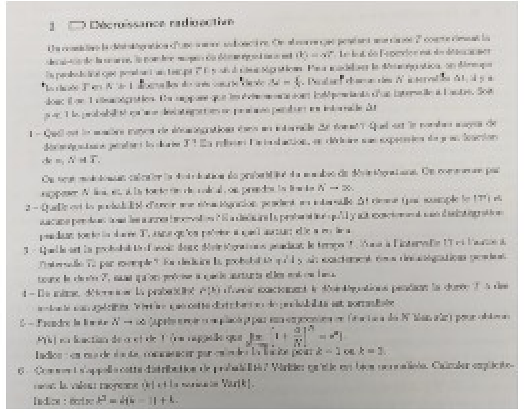
$$\langle k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} X_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle X_i \rangle}_{=p}$$

$$\langle k \rangle = \sum_{i=1}^{N} p \quad \text{ou} \quad \langle k \rangle = Np$$

$$\langle k \rangle = \alpha T \Rightarrow \boxed{p = \frac{\alpha T}{N}}$$

Loi binom de Newton


1 Décroissance radioactive

5) $P(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$

$= \binom{N}{k} \left(\frac{\alpha T}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^{N-k}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$= \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{\alpha T}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^{N-k}$

$= \frac{\overbrace{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k! \underbrace{N^k}_{k \text{ facteurs}}} \cdot (\alpha T)^k \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^N}_{\xrightarrow{N \to \infty} e^{-\alpha T}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^{-k}}_{\xrightarrow{N \to \infty} 1}$

$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot \ldots \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

$\frac{8!}{5!} = \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

$\frac{N!}{(N-k)!} = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)$

$= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{N}{N}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{N-1}{N}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{N-2}{N}}_{1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{N-k+1}{N}}_{1}$

$\xrightarrow{N \to \infty} \boxed{\frac{1}{k!} \cdot (\alpha T)^k \cdot e^{-\alpha T}}$

$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \approx 2{,}7}$ $\quad (1 + \sim 0)^n = \sim 1^n \approx \cancel{1}$

$2^n \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$

$\boxed{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e^x}$

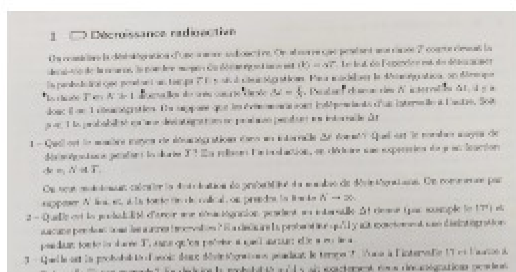
$$\boxed{\begin{gathered} X \sim \text{Poisson}(\delta) \\ P(X = k) = e^{-\delta} \cdot \frac{\delta^k}{k!} \end{gathered}}$$

$k \in \mathbb{N}_0$ pour des événements rares

Par exemple :

X = nombre de buts que Leur andardi fait dans le prochain match | évènements rare

~~X = nombre de buts de Dirk Nowitzki dans prochain match~~


1 Décroissance radioactive

miro

ts que
ait dans le | évènements rare

ts de Dick Nowitzki

1 ☐ Décroissance radioactive

On considère la désintégration d'une source radioactive. On observe que pendant une durée T courte devant la demi-vie de la source, le nombre moyen de désintégrations est $\langle k \rangle = \alpha T$. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que pendant un temps T il y ait k désintégrations. Pour modéliser la désintégration, on découpe la durée T en $N \gg 1$ intervalles de très courte durée $\Delta t = \frac{T}{N}$. Pendant chacun des N intervalles Δt, il y a donc 0 ou 1 désintégration. On suppose que les événements sont indépendants d'un intervalle à l'autre. Soit $p \ll 1$ la probabilité qu'une désintégration se produise pendant un intervalle Δt.

1 – Quel est le nombre moyen de désintégrations dans un intervalle Δt donné ? Quel est le nombre moyen de désintégrations pendant la durée T ? En relisant l'introduction, en déduire une expression de p en fonction de α, N et T.

On veut maintenant calculer la distribution de probabilité du nombre de désintégrations. On commence par supposer N fini, et, à la toute fin du calcul, on prendra la limite $N \to \infty$.

2 – Quelle est la probabilité d'avoir une désintégration pendant un intervalle Δt donné (par exemple le 17e) et aucune pendant tous les autres intervalles ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement une désintégration pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quel instant elle a eu lieu.

3 – Quelle est la probabilité d'avoir deux désintégrations pendant le temps T, l'une à l'intervalle 17 et l'autre à l'intervalle 71 par exemple ? En déduire la probabilité qu'il y ait exactement deux désintégrations pendant toute la durée T, sans qu'on précise à quels instants elles ont eu lieu.

4 – De même, déterminer la probabilité $P(k)$ d'avoir exactement k désintégrations pendant la durée T à des instants non spécifiés. Vérifier que cette distribution de probabilité est normalisée.

5 – Prendre la limite $N \to \infty$ (après avoir remplacé p par son expression en fonction de N bien sûr) pour obtenir $P(k)$ en fonction de α et de T (on rappelle que $\lim_{N\to+\infty} \left[1 + \frac{a}{N}\right]^N = e^a$).
Indice : en cas de doute, commencer par calculer la limite pour $k = 1$ ou $k = 2$.

6 – Comment s'appelle cette distribution de probabilité ? Vérifier qu'elle est bien normalisée. Calculer explicitement la valeur moyenne $\langle k \rangle$ et la variance $\mathrm{Var}(k)$.
Indice : écrire $k^2 = k(k-1) + k$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$(e^x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=0}^{3} a_{k+1}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_{0+1} + a_{1+1} + a_{2+1} + a_{3+1}$$

Changement de l'indice

Shift de l'indexe

b)
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$
$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$
$k \in \mathbb{N}_0$ pour des évènements rares

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \overset{!}{=} 1$$

$$e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Poisson(λ)

$$\langle X \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \, P(X_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\,\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} =$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^i}{i!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda+\lambda} = \lambda \cdot e^0 = \boxed{\lambda} = \langle k \rangle$$

$$V(\ldots) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

miro

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda+\lambda} = \lambda \cdot$$

$$\mathrm{Var}(X) = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$$

$$\frac{i^2}{i!} =$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum X^2 \, \mathbb{P}(X)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$\frac{i(i-1)}{i!} = \frac{1}{(i-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \cdot \lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda^i)}{(i-1)!} = i \lambda^{i-1}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} = |$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \frac{d}{d\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$\sum_{k=5}^{10} a_k = \sum_{k=4}^{9} a_{k+1}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda})$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} (\lambda + 1)$$

$$\boxed{(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v}$$

$$= \lambda(\lambda + 1)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$= \lambda(\lambda+1) - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \underline{\underline{\lambda}}$$